



Quantum Computing

**“Math Quantum Computing
Digital Systems”**

Dr. Cahit Karakuş, Mart - 2021



Bit

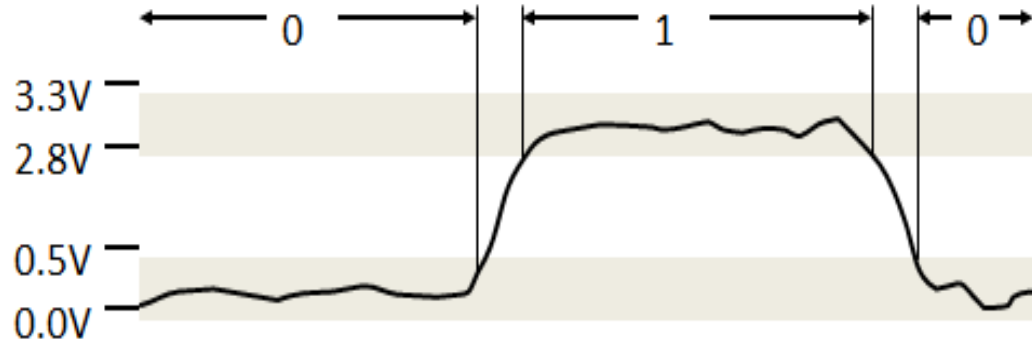
İkili Sinyal- Bit

İkili sinyal (Binary signal), iki durum sinyali: İki durumlu veriler (0/1).

- off & on
- Elektriksel sinyaller ile taşınır, saklanır. low voltage & high voltage; 0v & 5v

Bit: Sadece matematiksel bir kavram değil, aynı zamanda fiziksel dünyada karşılığı vardır.

- İkili sayı sistemi 0 veya 1 değerine sahip olur ve başka hiçbir şey olmaz.
- Bir bit, bir bilgisayardaki en küçük bilgi birimidir



Bit

- Bir sisteme sorulan, doğru ve yanlış olarak verilen iki yanıttan biri olan bilgidir.
- *Bir bit(0/1) bilginin temel birimidir.*
- Bit, bilgisayar sistemlerinde kullanılan bilginin temel kavramıdır, temel taşıdır.
- Bitler 0 veya 1 lerden oluşur. Birer matematiksel nesnedirler ve birer fiziksel durumlara karşılık gelirler.
- Bit, bilgisayarlar ile bilginin temsil edilmesinde kullanılır.
- Fiziksel gerçekleştirilmesi ne olursa olsun, bir bit her zaman, bir 0 ya da bir 1 olduğu anlaşılmaktadır.
- Buna bir benzetme, bir lamba anahtarı ile 0 temsil kapalı konuma ve 1 açık konumda olduğudur.
- İki tür bit vardır, klasik bir cbit, bit (0,1) ve quantum bit, qubit ($|0\rangle$, $|0\rangle$).

Bit

- Bir bitin alabileceği değerler 0 ya da 1 dir. Durum sayısı= 2^1
- Elimizde iki bitlik bir bilgi var ise temel 4 durumu vardır: 00, 01, 10,11. Durum sayısı= 2^2
- Üç bitin alabileceği 8 durum vardır: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Durum sayısı= 2^3
- n bitin alabileceği durum sayısı= 2^n dir. Durum uzayı olarak tanımlanır.
- (11001)_b: bu bir bilgidir. Tüm fiziksel sistemler ve sinyaller bitler ile temsil edilebilir.
- Odanın sıcaklığı 25derece, bu bir bilgidir. $(25)_d=(11001)_b$, $(25)_{10}=(11001)_2$
- İkili tabandaki bir sayı onluk tabana nasıl dönüştürülür? Sağdan 0 ile başlanarak indislenir. 1 olan 2 üzeri indis değerleri toplanır. $(11001)_2=2^4+2^3+2^0=25$.

Multipliers for Measuring Bytes

Byte: *Bellek boyutunu hesaplanırken ya da veri tipini tanımlada kullanılır.* Elektronik ve bilgisayar bilimlerinde genellikle 8 bitlik dizilim boyunca 1 veya 0 değerlerini bünyesine alan ve kaydedilen bilgilerin türünden bağımsız bir bellek ölçüm birimidir. Belleğin 8 bitlik bir değerini işaretleyen ya da tanımlayan en küçük birimi olarak tanımlanmıştır..

- Kilobyte (K) $2^{10} = 1,024$ bytes
- Megabyte (M) $2^{20} = 1,048,576$ bytes
- Gigabyte (G) $2^{30} = 1,073,741,824$ bytes
- Terabytes (T) $2^{40} = 1,099,511,627,776$ bytes
- Petabytes (P) $2^{50} = 1,125,899,906,842,624$ bytes
- Exabytes (E) $2^{60} = 1,152,921,504,606,846,976$ bytes
- Zettabytes (Z) $2^{70} = 1,180,591,620,717,411,303,424$ bytes
- Yottabytes (Y) $2^{80} = 1,208,925,819,614,629,174,706,176$ bytes

Bits and Bytes are Slightly Different

“Kilo” or “Mega” have slightly different values when used with bits per second or with bytes.

- When Referring to Bytes (as in computer memory)
 - Kilobyte (KB) $2^{10} = 1,024$ bytes
 - Megabyte (MB) $2^{20} = 1,048,576$ bytes
 - Gigabyte (GB) $2^{30} = 1,073,741,824$ bytes
 - Terabyte (TB) $2^{40} = 1,099,511,627,776$ bytes
- When Referring to Bits Per Second (as in transmission rates)
 - Kilobit per second (Kbps) = 1000 bps (thousand)
 - Megabit per second (Mbps) = 1,000,000 bps (million)
 - Gigabit per second (Gbps) = 1,000,000,000 bps (billion)
 - Terabit per second (Tbps) = 1,000,000,000,000 bps (trillion)

Bit, Bit/San

Bit: Dijital elektronikte ve binary sayı sisteminde sadece 0 ve 1 değerleri vardır. Tüm işlemler bu iki değer üzerinden yapılır. 0 ya da 1 bilgisinin her birine bit denir. Bit→0/1 den oluşan bilgi

- Bits are the units used to describe an amount of data in a network
 - 1 kilobit (Kbit) = 1×10^3 bits = 1,000 bits
 - 1 megabit (Mbit) = 1×10^6 bits = 1,000,000 bits
 - 1 gigabit (Gbit) = 1×10^9 bits = 1,000,000,000 bits

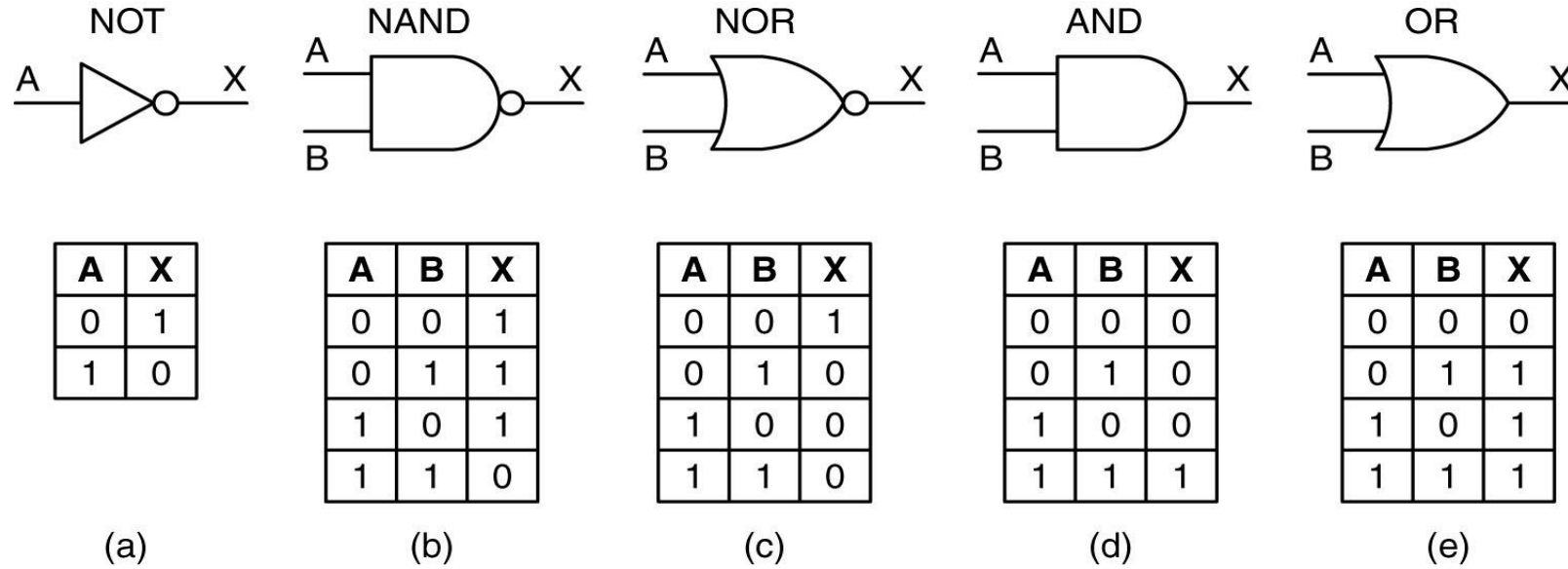
Bit/Saniye: Bit/sec→1 sn. ye de bir noktadan diğer noktaya iletilen bilgi. Ya da bir saniyede işlen bit yani bilgi miktarıdır. **BPS (Bit Per Second);** Saniyede iletilen bit sayısına bps denir.

- Seconds are the units used to measure time
 - 1 millisecond (msec) = 1×10^{-3} seconds = 0.001 seconds
 - 1 microsecond (msec) = 1×10^{-6} seconds = 0.000001 seconds
 - 1 nanosecond (nsec) = 1×10^{-9} seconds = 0.000000001 seconds
- Bits per second are the units used to measure channel capacity/bandwidth and throughput
 - bit per second (bps)
 - kilobits per second (Kbps)
 - megabits per second (Mbps)



Mantık Kapıları ve Boole Cebri

Mantık Kapıları için semboller ve işlevsel davranış



AND Kapısı: Girişlerden herhangi biri 0 ise çıkış 0 dır. Girişlerin tümü 1 ise çıkış 1 dir.

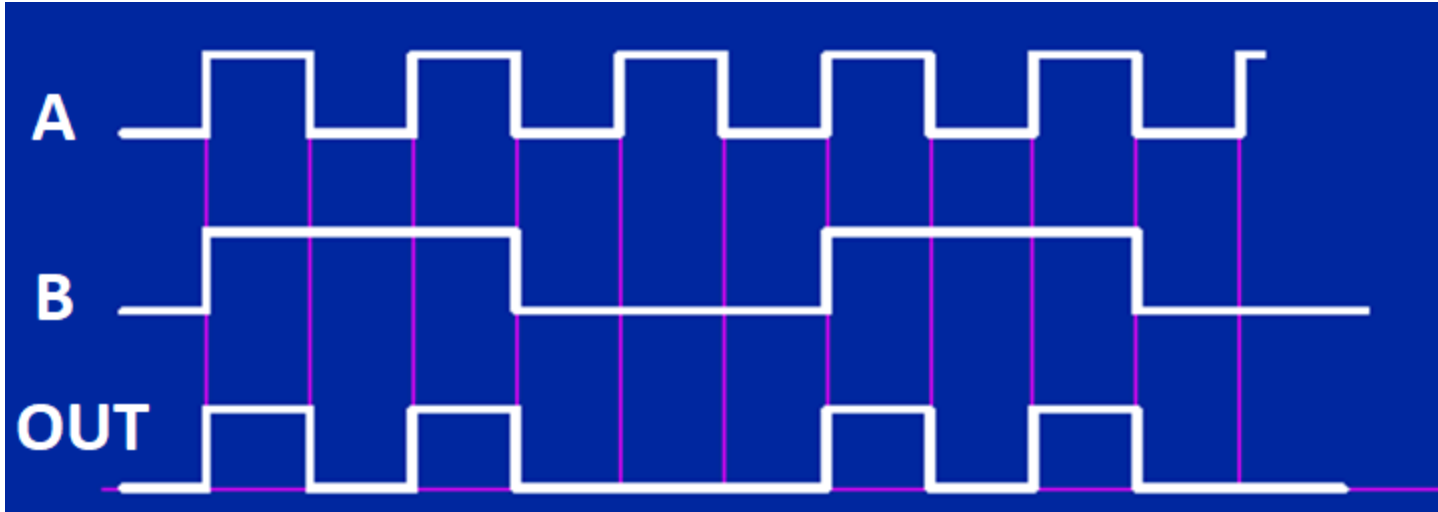
OR Kapısı: Girişlerden herhangi biri 1 ise çıkış 1 dır. Girişlerin tümü 0 ise çıkış 0 dir.

NOT Kapısı: girişin evriğini alır.

Mantık kapısı, bir Boole işlevini uygulayan idealleştirilmiş veya fiziksel bir cihazdır, yani bir veya daha fazla mantık girişinde mantıksal bir işlem gerçekleştirir ve tek bir mantık çıkışı üretir.

Giriş ve Çıkış mantıksal seviyelere bakılarak mantık kapısını belirleme

- Giriş dalga formları A ve B bir mantık kapısının iki girişine uygulandığında çıkış dalga formu belli ise bu kapının türünü belirleyiniz. (AND Kapısı)



A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logic Gates

Toplama

Karşılaştırma

The **EXCLUSIVE OR** Truth Table

A	B	f = A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

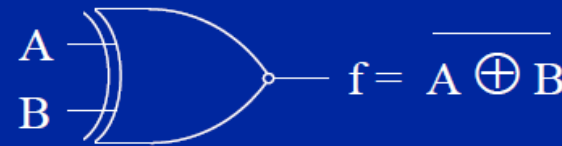
The **EXCLUSIVE NOR** Truth Table

A	B	f = A XOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

The **XOR** Gate



EXCLUSIVE NOR Gate



This is called the equivalence gate

Karşılaştırma ve Aritmetik toplama işlemlerinde XOR kapıları kullanılır.

Girişlerin tümü birbirine eşit (0 ya da 1) çıkış sıfır ise XOR, çıkış 1 ise XNOR kapısıdır.

Logic Functions

Truth Table: 3-input majority function

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

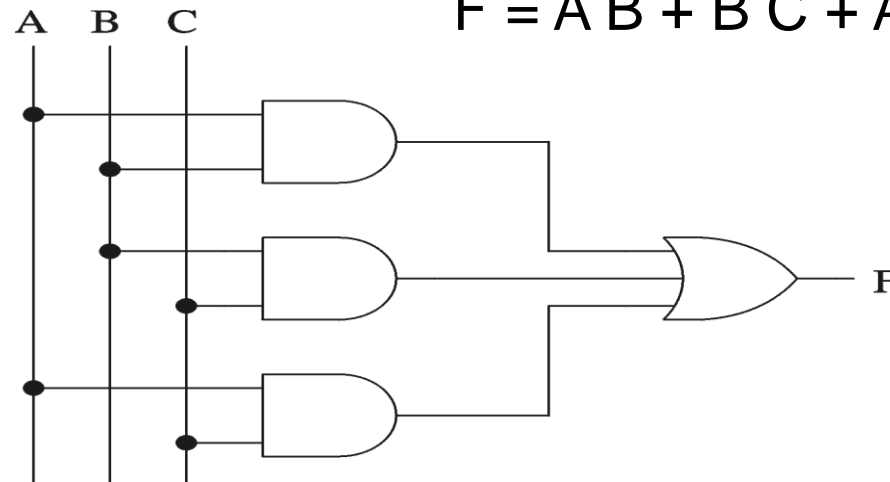
- **Logical functions can be expressed in several ways:**

- Truth table
- Logical expressions, indirgeme
- Graphical form

- **Logical expression form**

$$F = A'BC + AB'C + ABC' + ABC$$

$$F = AB + BC + AC$$



- Verilen denklemlerdeki değişkenlerin toplamı giriş sayısını verir.
- Mantık kapılarında mantıksal denklemin sonucu 1 ya da 0 dir.

Giriş sayısı, m olursa kaç farklı durum vardır? $S=2^m$ durum vardır. 2 tabanlı olmasının nedeni ikili sayı (binary) sisteminden kaynaklanmaktadır: 0 yada 1, bit

Boole Cebirinin Kuralları ve Yasaları

Tek değişkenli temel kurallar:

- Boole Cebirinin Kurallarının ve Yasalarının her birinin bir kanıtı, değişkenin yalnızca iki bit(0/1) değere sahip olabileceği gerçeğinden yararlanılarak kolayca ispat edilebilir.
- Not: $A=0$ ya da 1 olur.
- $A + A + A + A + \dots + A + 1 = 1$; OR kapısında girişlerden herhangi biri 1 ise çıkış birdir. Diğer ispat etme yöntemi, 1 ve 0 değerleri verilerek doğruluk aranır.
- $A + A + A + \dots + A = A$ (Neden? İki değişkenli 0 ya da 1 girişler mevcuttur)
- $A + A + \dots + A = A$
 - If $A = 0$ then $0 + 1 = 1$
 - If $A = 1$ then $1 + 1 = 1$

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + A = A$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

It should be noted that $\bar{\bar{A}} = A$

Mantıksal devrelerde ve matematiğinde iki sayı var: 0 ve 1

Soru: Boole cebirini kullanarak aşağıdaki işlemi yapınız. $A=9$, $A+1=?$

a) 0 b) 1 c) 10 d) 8 e) hiçbirisi

Soru: Boole cebirinde A hangi değerleri alır? a) 0 b) 1 c) $0/1$ d) $0,1,2, \dots, 9$

d) Her değeri e) hiçbir değeri

Soru: Boole cebirinde $A=1$ ise, $A+A+A+A+A=?$ A) 1 B) 0 C) A D) 5 D) $5A$ E) Hiçbiri

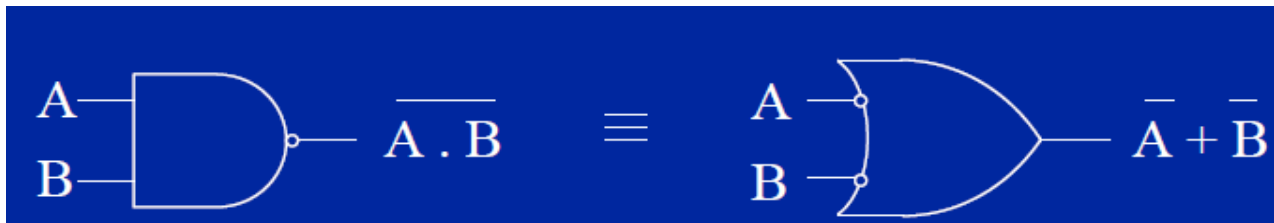
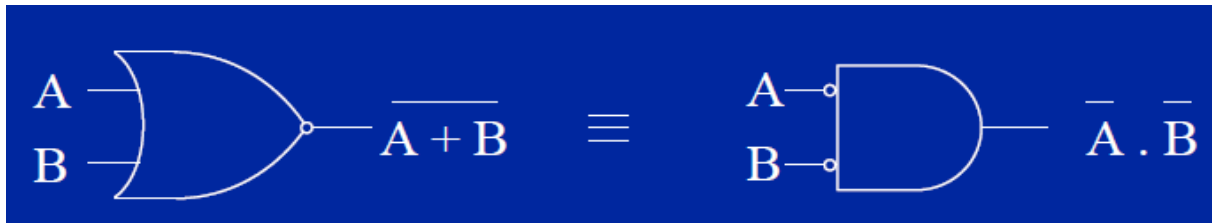
Soru: Boole Cebirinde $A * A * A * A = ?$ A) A B) A^4

Boole Cebirinin Kuralları ve Yasaları

DeMorgan Yasaları, NAND ve NOR mantığı ile uğraşırken özellikle yararlıdır.

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$



Boole Cebri Teoremleri

1. a) $a+b=b+a$ Değişme Özelliği
b) $a \cdot b=b \cdot a$
2. a) $a+b+c=a+(b+c)$ Birleşme Özelliği
b) $a \cdot b \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
3. a) $a+b \cdot c=(a+b) \cdot (a+c)$ Dağılma Özelliği
b) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$
4. a) $a+a=a$ Değişkende Fazlalık Özelliği
b) $a \cdot a=a$
5. a) $a+a \cdot b=a$ Yutma Özelliği
b) $a \cdot (a+b)=a$
6. a) $(a)^n=a$ İşlemde Fazlalık Özelliği
b) $(a \times n)=a$
7. a) $\overline{(a+b)}=\bar{a} \cdot \bar{b}$ De Morgan Kuralı
b) $\overline{(a \cdot b)}=\bar{a} + \bar{b}$

8. a) $a+\bar{a}=1$ Sabit Özelliği
b) $a \cdot \bar{a}=0$
9. a) $0+a=a$ Etkisizlik Özelliği
b) $1 \cdot a=a$
10. a) $1+a=1$ Yutan Sabit Özelliği
b) $0 \cdot a=0$
11. a) $(a+b) \cdot b=b$
b) $a \cdot b +b=b$

- The 12 Rules of Boolean Algebra

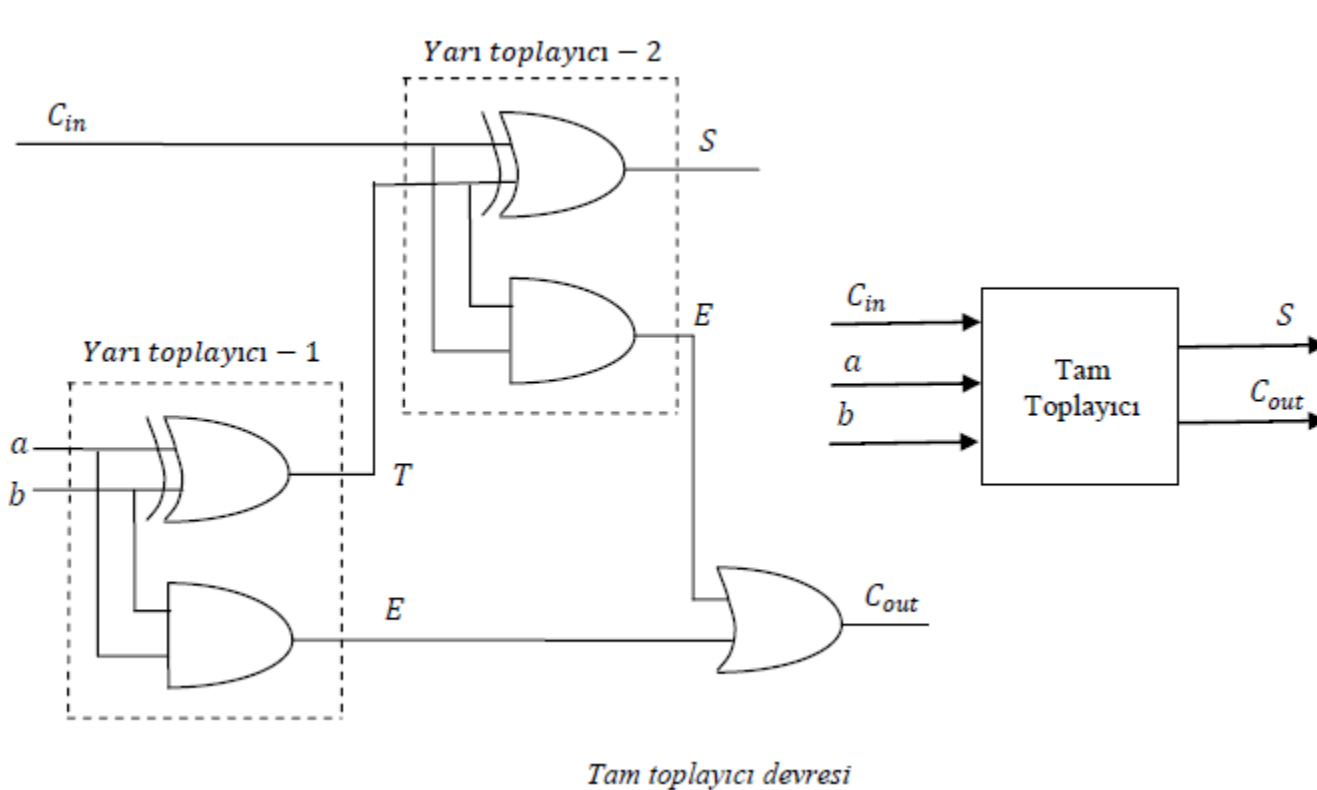
- $A + 0 = A$
- $A + 1 = 1$
- $A \cdot 0 = 0$
- $A \cdot 1 = A$
- $A + A = A$
- $A + \bar{A} = 1$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \bar{A} = 0$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $A + AB = A$
- $A + \bar{A}B = A + B$
- $(A + B)(A + C) = A + BC$

Mantıksal işlemlerin sonucu daima 1 ya da 0 dir.

- $a + a + a + a + \dots + a = a$
- $a * a * a * \dots * a = a$
- $1 + a + b + c + \dots + z = 1$
- $ab'c + ab'c = ab'c$; benzer ifadelerin toplamı her zaman benzer bir tanesine eşittir.

Tam toplayıcı (Full Adder)

- Girişinde elde bitinin olduğu ve bir bitlik iki sayı ile birlikte toplandığı bir kombinyonel devredir.



C_{in}	a	b	Toplam S	Elde C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

ab C_{in}	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

ab C_{in}	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

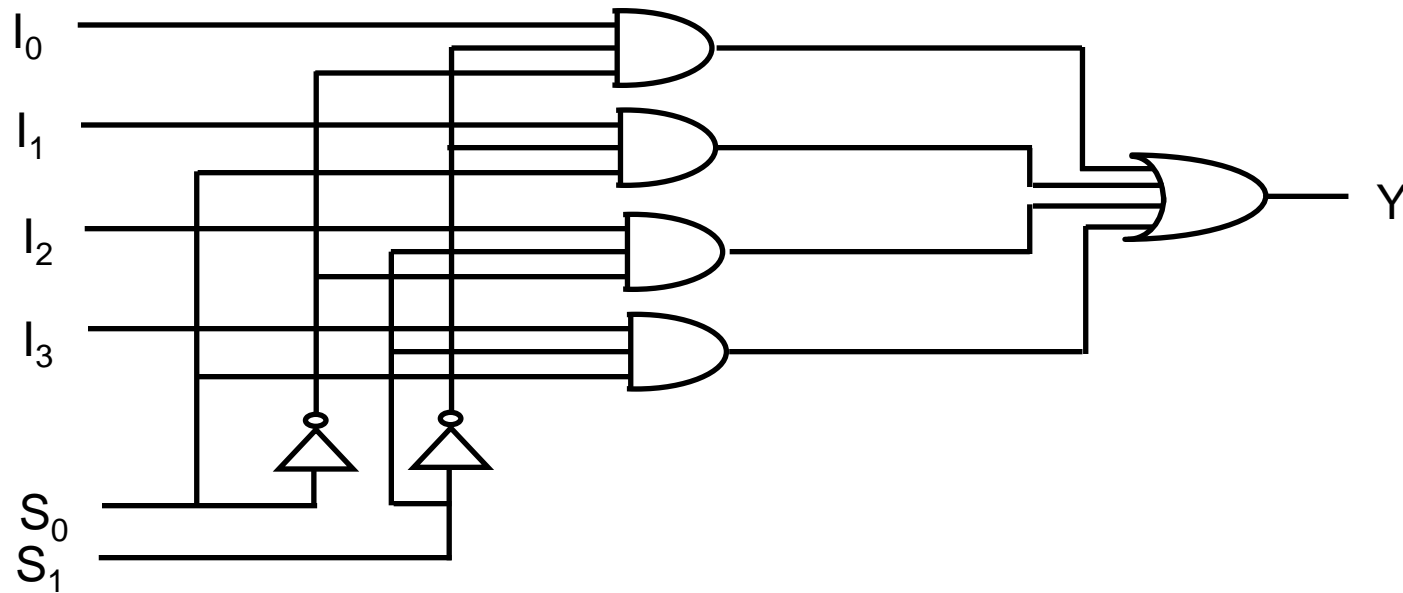
$$T = C_{in}\bar{a}\bar{b} + \bar{C}_{in}\bar{a}b + C_{in}ab + \bar{C}_{in}a\bar{b} = \bar{C}_{in}(\bar{a}b + a\bar{b}) + C_{in}(ab + \bar{a}\bar{b}) \Rightarrow T = a \oplus b \oplus C_{in}$$

$$C_{out} = C_{in}b + C_{in}a + ab$$

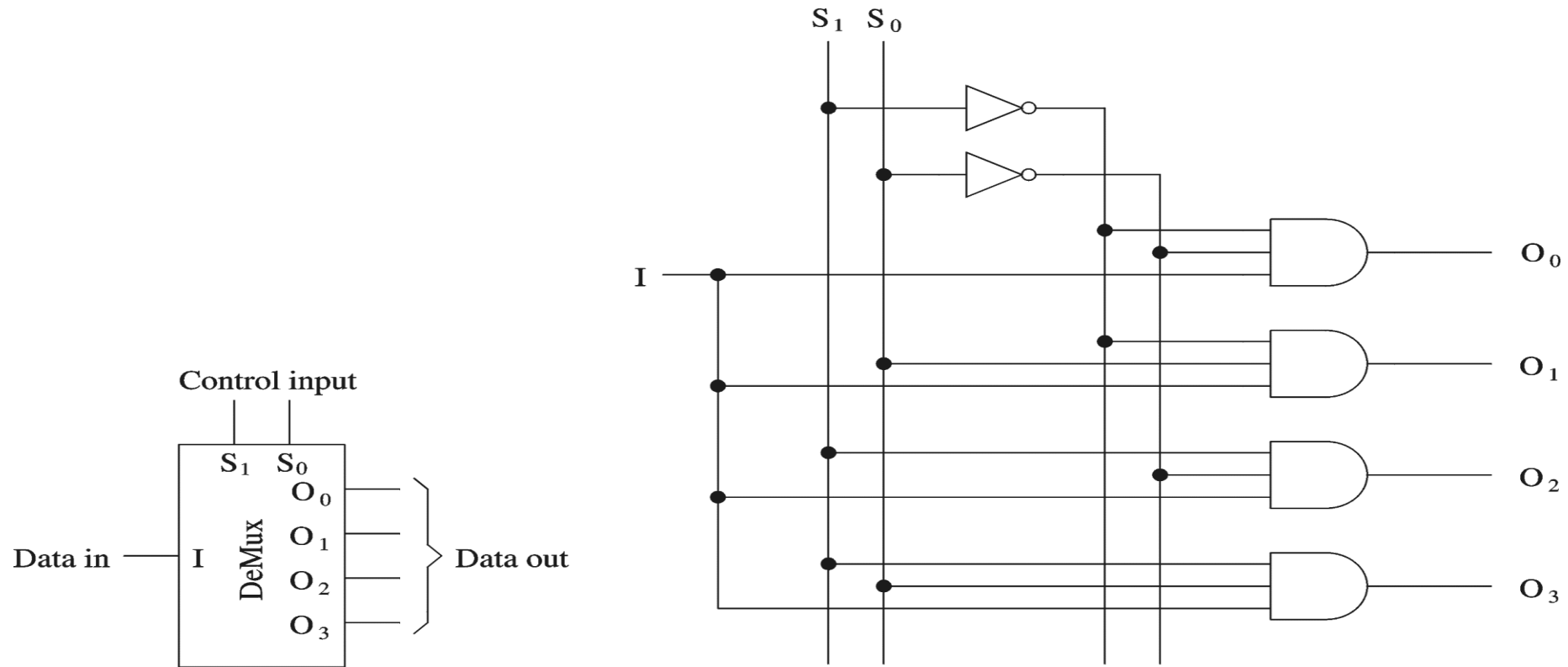
MULTIPLEXER

4-to-1 Multiplexer

Select		Output
S_1	S_0	Y
0	0	I_0
0	1	I_1
1	0	I_2
1	1	I_3



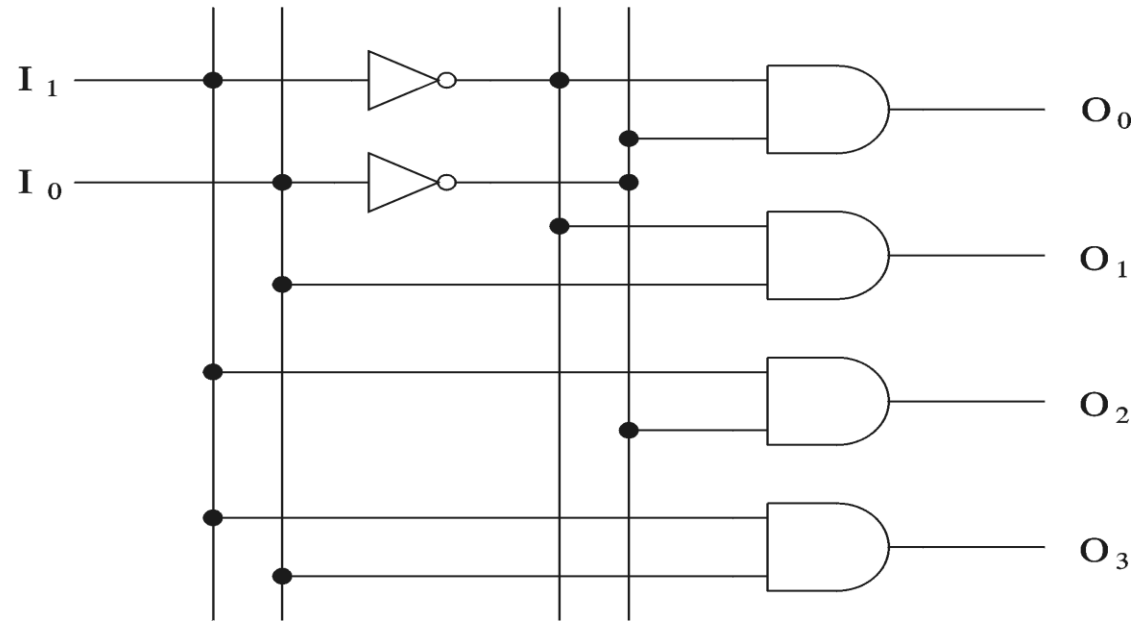
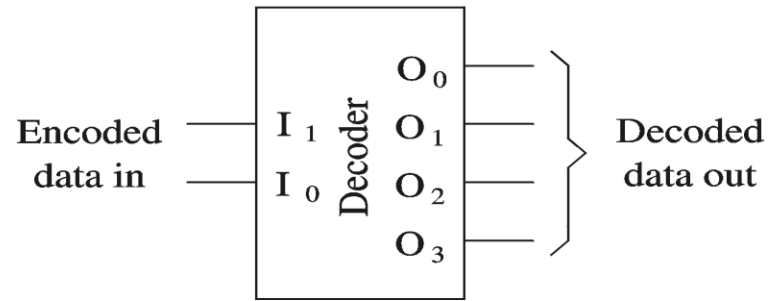
Demultiplexer (DeMUX)



Decoders

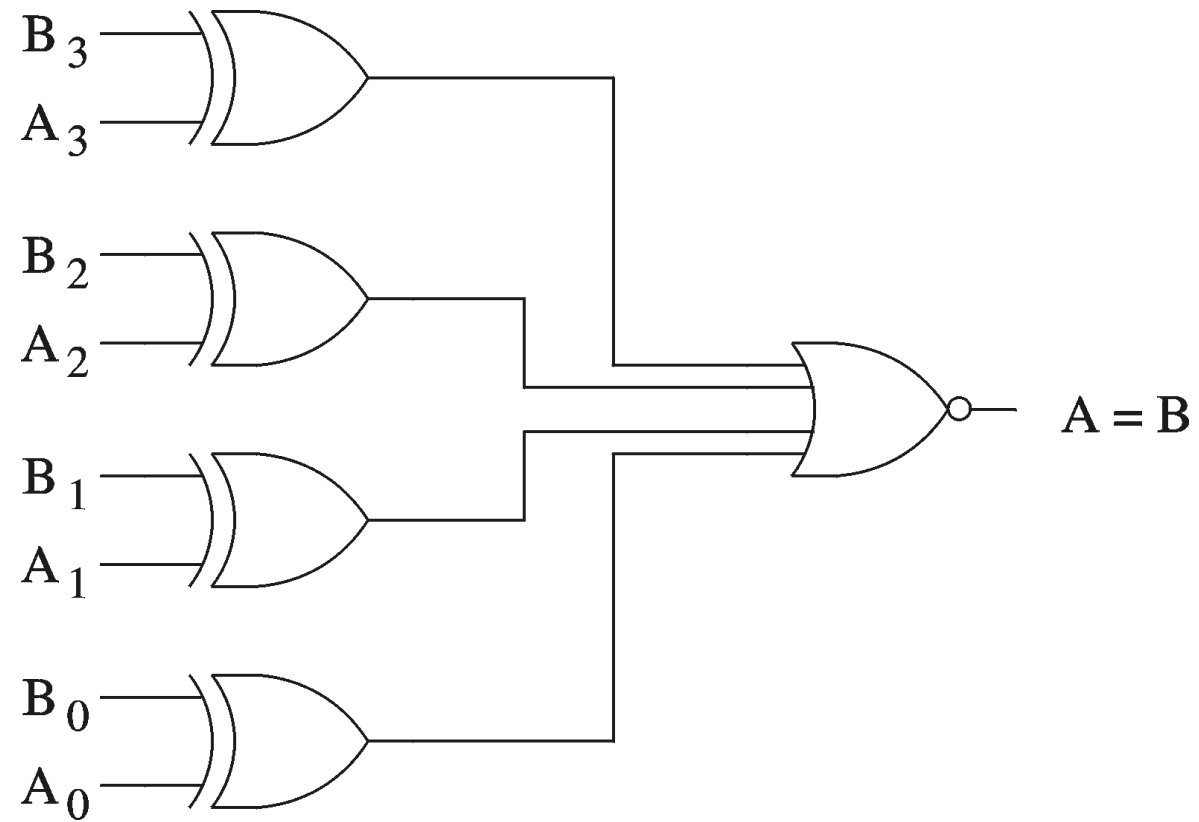
- Decoder selects one-out-of-N inputs

I_1	I_0	O_3	O_2	O_1	O_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

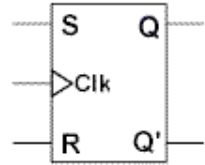
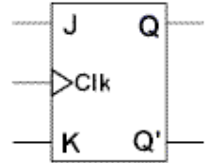
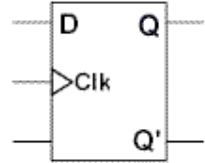
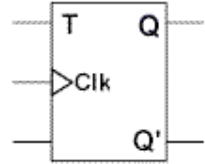


Comparator

- Used to implement comparison operators ($=$, $>$, $<$, \geq , \leq)

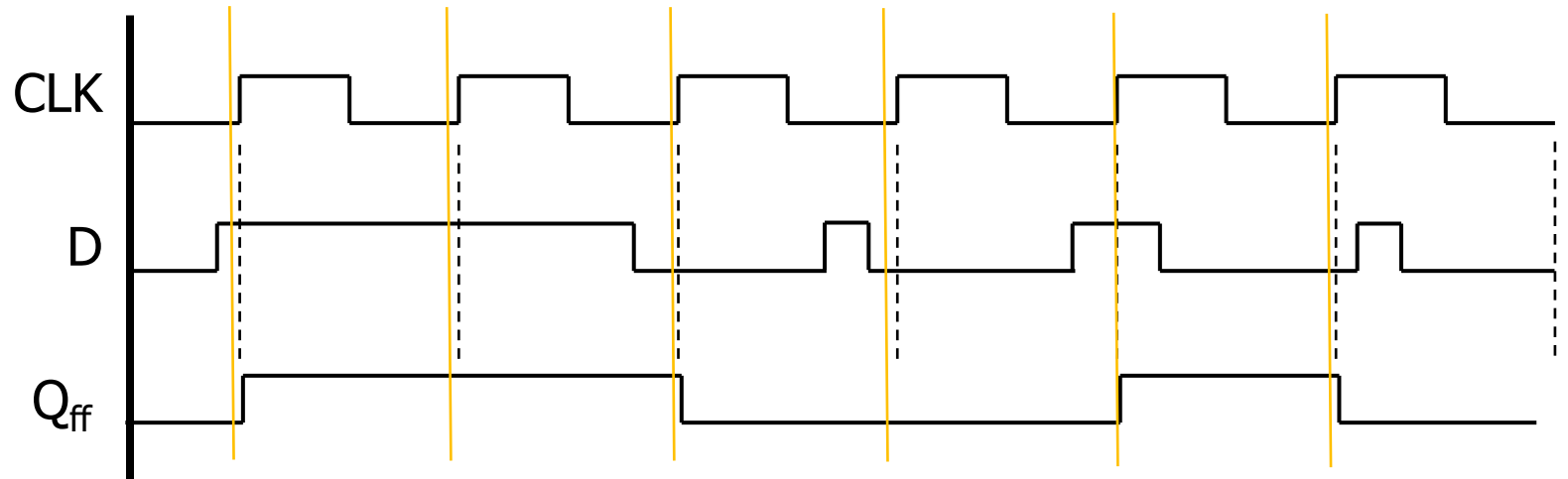
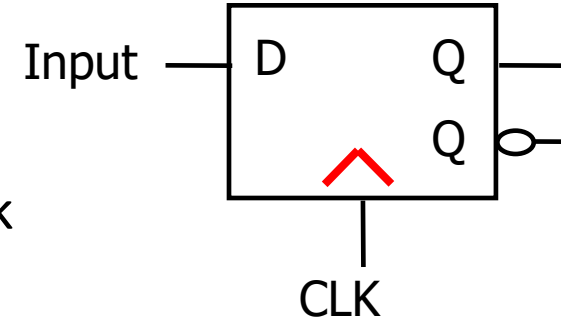


Sequential (Sıralı Mantık) Logic

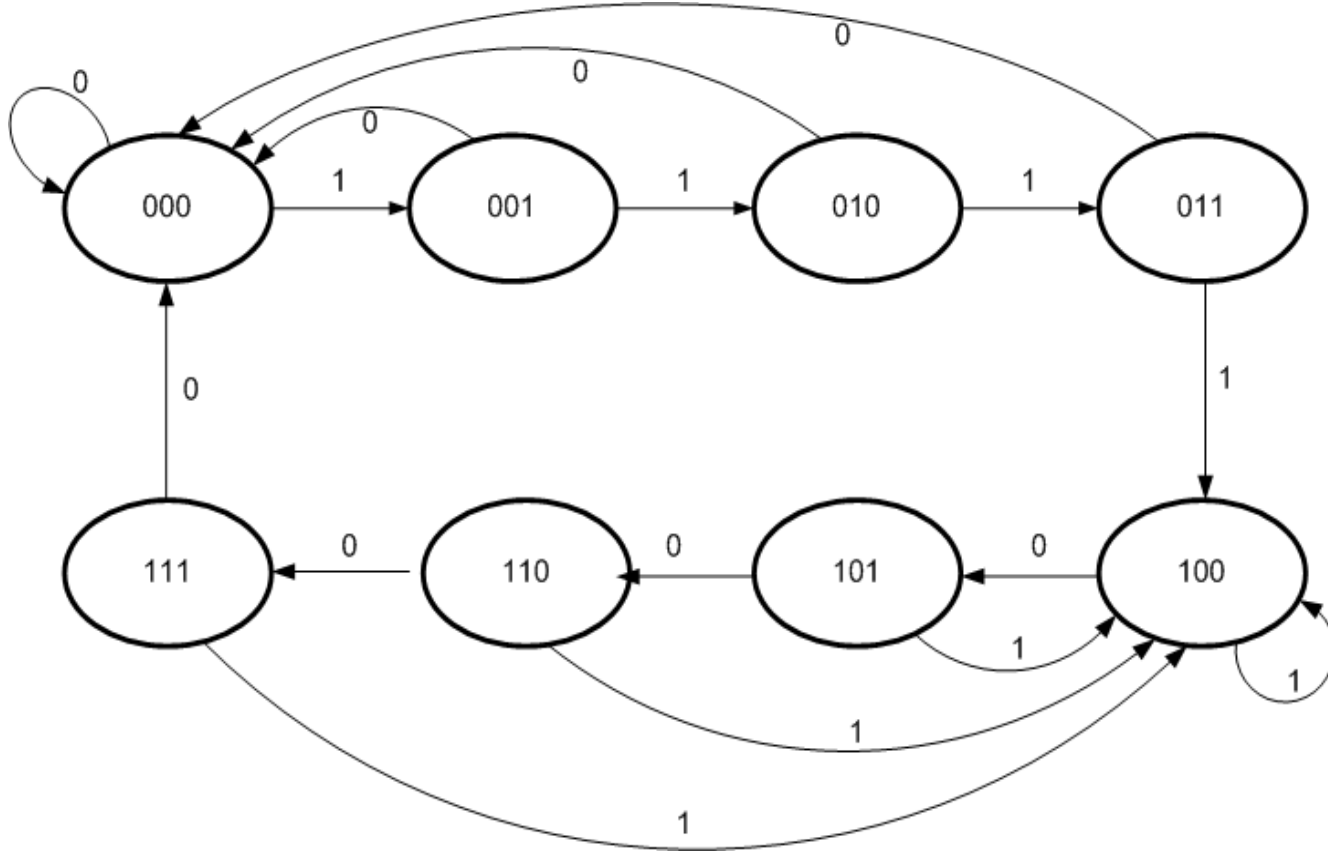
FLIP-FLOP NAME	FLIP-FLOP SYMBOL	CHARACTERISTIC EQUATION	EXCITATION TABLE																				
SR		$Q_{(next)} = S + R'Q$ $SR = 0$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Q</th> <th>Q_(next)</th> <th>S</th> <th>R</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>X</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	Q	Q _(next)	S	R	0	0	0	X	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	X	0
Q	Q _(next)	S	R																				
0	0	0	X																				
0	1	1	0																				
1	0	0	1																				
1	1	X	0																				
JK		$Q_{(next)} = JQ' + K'Q$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Q</th> <th>Q_(next)</th> <th>J</th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>X</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>X</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	Q	Q _(next)	J	K	0	0	0	X	0	1	1	X	1	0	X	1	1	1	X	0
Q	Q _(next)	J	K																				
0	0	0	X																				
0	1	1	X																				
1	0	X	1																				
1	1	X	0																				
D		$Q_{(next)} = D$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Q</th> <th>Q_(next)</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Q	Q _(next)	D	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1					
Q	Q _(next)	D																					
0	0	0																					
0	1	1																					
1	0	0																					
1	1	1																					
T		$Q_{(next)} = TQ' + T'Q$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Q</th> <th>Q_(next)</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	Q	Q _(next)	T	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0					
Q	Q _(next)	T																					
0	0	0																					
0	1	1																					
1	0	1																					
1	1	0																					

The D flip-flop

- Input sampled at clock edge
 - Rising edge: Input passes to output
 - Otherwise: Flip-flop holds its output
- Flip-flops can be rising-edge triggered or falling-edge triggered
- Clok işaretinin yükselen kenarında çıkış girişe eşit olur ($Q=D$). Clok işaretinin diğer tüm durumlarda çıkış değişmez.
- Şu anki durum (Q) ve bir sonraki durum (D) birlikte göz önüne alınır.



Durum Diyagramı



- Şu anki ve bir sonraki durumlara göre ikili devre sayısı bulunur
- İkili sayısı=3 adettir. Çünkü Durum diyagramında tüm durumlar 0 ile 7 arasında değişmektedir. Toplam durum sayısı= $8=2^3$ dür.
- Şu anki durumlar D-ikili devresini Q çıkışlarında bulunmaktadır. Bir sonraki durum ise D-ikili devresinin D girişlerinde bulunmaktadır.
- Clok'un yükselen kenarı ile D-ikili devresi tetiklendiğinde Q-çıkışları D-girişlerine eşit olur.

Durum Tablosunun oluşturulması ve Karnaugh diyagramı yardımıyla indirgenmesi

Şu anki durum			Giriş	Bir sonraki durum		
Q2	Q1	Q0	C	D2	D1	D0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Q ₂ Q ₁ \ Q ₀ C	00	01	11	10
00				
01			(1)	
11	(1)	(1)	(1)	
10	(1)	(1)	(1)	(1)

D2=

Q ₂ Q ₁ \ Q ₀ C	00	01	11	10
00			(1)	
01		(1)		
11	(1)			
10				(1)

D1=

Q ₂ Q ₁ \ Q ₀ C	00	01	11	10
00		(1)		
01		(1)		
11	(1)			
10	(1)			

D0=

- $D2 = Q2Q1' + Q2Q0' + Q1Q0C$
- $D1 = Q2Q1Q0'C' + Q2'Q1Q0'C + Q2'Q1'Q0C + Q2Q1'Q0C'$
- $D0 = Q2'Q0'C' + Q2Q0'C$

Usage Notes

- A lot of slides are adopted from the presentations and documents published on internet by experts who know the subject very well.
- I would like to thank who prepared slides and documents.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,

Dr. Cahit Karakuş

cahitkarakus@gmail.com